

自己組織化神経細胞の力学

藤 田 昌 彦

Dynamics of interconnected
self-organizing nerve cells

Masahiko Fujita

Dynamics of self-organized nerve cell model by Hebb's law of learning is satisfactorily elucidated in the case of a single neuron, and stable solutions of the two neuron system with mutual excitation or inhibition are acquired. The application for a system of such neurons with one dimensional extension gives us a simple explanation for columnizing of category detecting nerve cells in mammal visual cortex. A simple but rigorous proof for the validity of an averaged learning equation is also given.

あ ら ま し

神経細胞モデルの Hebb 型の学習による自己組織化の力学を単一ニューロンの場合に明らかにし、次に 2 ニューロン系の平衡解を導いた。その応用として 1 次元拓がりをもつ相互に結合したこのような細胞の反応特性の例を示し、視覚領特徴抽出細胞のコラム化の単純な説明を与えた。なお平均化学学習方程式の妥当性について厳密な証明を付する。

1. ま え が き

動物の生命活動において神経系が重要な役割りを果していることは既に知られている。生理学の分野では微小電極法が開発されて以来、個々の細胞の活動電位の記録が可能となり、それを武器として、形態学的にも解剖学的にも急展開を遂げてきた。神経系が遺伝的にすなわち生得的にその構造が確定しているのか、或は生後の経験により定まるのか論議のある所であるが、神経系の大脳化とよばれる機能は生後の感覚入力に大いに依存しているに違いない。

神経系が示す自己組織化、広い意味での学習方式については工学的な立場から「教師あり」のモデルと「教師なし」のモデルが提案されている¹⁾。生理学との関連でいえば、前者では小脳皮質の構造・機能モデルとし

て「小脳パーセプトロン説」^{2),3)}が知られている。後者としては大脳皮質視覚領における特徴抽出細胞の形成モデル^{4),5)}、皮質で広く見出されるトポグラフィカルな結合の形成のモデル^{6),7)}があげられるだろう。甘利は自己組織化のモデルとして Hebb 型の学習法則を提出し、上記の理論を展開した。本論文では甘利の方程式のダイナミックスを調べた文献⁸⁾をより一般の場合に拡張し、相互結合をもつ 1 次元場の性質を解明するために 2 ニューロン系の力学、平衡解を求めた。1 次元場の適用として、特徴抽出細胞がブロック化して形成されることについて単純なモデルを提示する。また、いわゆる平均化学学習方程式^{5),8)}の妥当性についての証明を与える。

2. 神経細胞の学習法則

神経細胞は入力の空間和および出力の閾値・飽和特性をモデル化して

$$u = \mathbf{w} \cdot \mathbf{x} - w_0 \cdot x_0 \quad (1)$$

$$z = 1[u] = \begin{cases} 1 & \cdots u \geq 0 \\ 0 & \cdots u < 0 \end{cases}$$

で表わされる。ここに $\mathbf{w} = (w_1, \dots, w_n)$, $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$ で一般にアナログ量であり、図 1 にみるように、入力 \mathbf{x} がシナプス \mathbf{w} を介して入り、定数の抑制性入力 x_0 も重み $-w_0$ を介して入り、その荷重和が非負のとき出力

1 を出す。シナプス結合荷重の変化は細胞の応答を変えるのであるが、Hebb 型の学習法則として提案されたものを示す⁵⁾。

$$\tau \dot{w}_i = -w_i + c r x_i, \quad c > 0 \quad (2)$$

$$\tau \dot{w}_0 = -w_0 + c' r x_0, \quad c' > 0 \quad (3)$$

ここで $\dot{}$ は時間微分 d/dt を示し、 $r = r(u)$ で、学習の進み具合をその時点で起きた膜電位 u に応じて定まる係数、学習強化信号である。簡単のために

$$r = 1[u] = \begin{cases} 1 & \cdots u \geq 0 \\ 0 & \cdots u < 0 \end{cases} \quad (4)$$

で表わす。この素子に入力パターン x_1, x_2, \dots, x_k を入れて自己組織化を進める。入力の仕方は、 k 個のパターンを互に独立に確率 p_1, p_2, \dots, p_k で選出し、一定の ε 時間、継続して入力することを繰返すものとする。時系列 $x(t)$ につき (2), (3) 式を調べるかわりに ε/τ が十分に小さいとき、平均化学習方程式

$$\tau \dot{w} = -w + c \langle r x \rangle \quad (5)$$

$$\dot{w}_0 = -w_0 + c' \langle r x_0 \rangle \quad (6)$$

$$\langle r x \rangle = \sum_{j=1}^k p_j r[u_j] x_j, \quad \langle r x_0 \rangle = \sum_{j=1}^k p_j r[u_j] x_0$$

で近似できることが証明される。付録の定理 7 に示す。(5), (6) 式によりシナプス結合荷重が変化するとき入力パターン x_i がひきおこす膜電位 u_i もまた変化する。 $u_i = w \cdot x_i - w_0 \cdot x_0$ の時間微分に (5), (6) 式を用いて

$$\tau \dot{u}_i = -u_i + c \sum_{j=1}^k p_j 1[u_j] x_j \cdot x_i - c' \sum_{j=1}^k p_j 1[u_j] x_0^2 \quad (7)$$

$$\text{ここで } x_j \cdot x_i = \begin{cases} a & i \neq j \quad (-1 < a < 1) \\ 1 & i = j \end{cases} \quad (8)$$

と仮定すると

$$\tau \dot{u}_i = -u_i + c(1-a)p_i 1[u_i] + (ac - c' x_0^2) \sum_{j=1}^k p_j 1[u_j] \quad (9)$$

を得る。 k 個のパターンの間に競合がおこる条件として

$$ac - c' x_0^2 < 0 \quad (10)$$

の条件を課する。

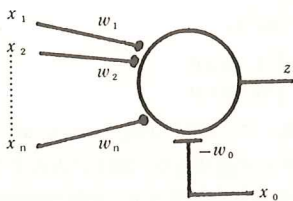


図 1 自己組織化細胞のモデル

(9) 式で定まる細胞の応答変化を調べるが、非線形な力学系であること、したがって時間の原点移動に関して不変であるから、初期値を $u_i(0)$ $i=1, \dots, k$ で与えるものとする。

〔補題 1〕 $u_i(0) < 0$ なら任意の時刻 $t > 0$ において $u_i(t) < 0$ である。

(証明) (9) 式の右辺第 2 項は 0、第 3 項は条件 (10) から高々 0 であるので、 $u_i(t)$ は負の値から高々 0 に指数的に漸近する。したがって $u_i(t) < 0$ 。 (証明終)

〔定義 1〕 $I = \{i | u_i(0) > 0, i=1, \dots, k\}$

$$P = \sum_{j \in I} p_j, \quad r_i = p_i/P$$

$$b = (c' x_0^2 - ac)/c(1-a)$$

とし、 r_i を相対頻度、 b を相対頻度閾値とよぶ。

〔補題 2〕 $r_i \geq b, i \in I$ ならば任意の時刻 $t > 0$ において $u_i(t) > 0$ である。

(証明) (9) 式は上の記法を用いて $i \in I$ について

$$\tau \dot{u}_i = -u_i + c(1-a)p_i + (ac - c' x_0^2)P \quad (11)$$

みやすくして $v_i = u_i/c(1-a)p_i$ とおくと

$$\tau \dot{v}_i = -v_i + 1 - b/r_i \quad (12)$$

$u_i(0) > 0$ から $v_i(0) > 0$ 、条件から $1 - b/r_i \geq 0$ 、更に時間の経過で P が変化しても補題 1 から、減少しか起らず、逆に r_i は増大しかおこらない。したがって、つねに $1 - b/r_i \geq 0$ は満たされているので、 v_i は正数に漸近する。 (証明終)

〔定義 2〕 $J = \{i | i \in I, r_i < b\}$

$$n_j(t) = u_j(t)/(b - r_j), j \in J$$

とおき、 n_j を反応パターンの特性数とよぶ。

補題 2 により $r_i \geq b$ なるパターンは安定であることが示されたが、残りの反応パターンについて述べたのが次の補題である。

〔補題 3〕 $u_j, j \in J$ は反応パターンに変化がない限り単調に減少し、最初に 0 となるものを u_{j0} とすると、 T を $u_{j0}(T) = 0$ として

1) $n_j(t)$ は時間 $[0, T)$ でその大小順序が保存され、

2) $n_{j0}(t) \leq n_j(t), j \neq j_0$

(証明) 単調減少性は (12) 式から明らか。(11) 式をいって $u_i(t_0) = 0$ とおくと、

$$t_0 i = \tau \ln \{1 - u_i(0)/d_i\} \quad (13)$$

$$d_i = c(1-a)P(r_i - b)$$

対数関数 \ln の単調増大性から

$t_0 i$ の大小 $\longleftrightarrow -u_i(0)/d_i$ の大小 $\longleftrightarrow u_i(0)/(b - r_i)$ の大小が成立し、2) がいえる。1) は時間 $[0, T)$ の範囲で原点移動しても、以上の議論がそのまま適用できる

ことから明らかである。

(証明終)

補題 1, 2, 3 で(9)式に支配されるパターンの力学は記述される。すなわち,

[定理 1]

- 1) 非反応パターンが復活することはない。
- 2) 相対頻度が閾値以上のものは安定反応パターンとして固定される。
- 3) 安定でないパターンのうち特性数が最小のパターンは消失し, 残りのパターンの相対頻度は変化するが, その大小順序は不変。
- 4) パターンの発生確率 p_i を変化させても素子が安定的に反応するのは高々 $[1/b]$ 個である。ただし, $[]$ はガウスの記号を示す。

(証明) 1), 2), 3), は補題 1, 2, 3 の言い換えにすぎない。4) については, いま素子が安定的に ℓ 個のパターンにつき反応したとし, その中の最小確率を p_0 とする。2), 3) から安定的に反応するパターンとして残るものはその相対頻度が閾値を下まわることがないことがわかるので,

$$\frac{1}{\ell} = -\frac{p_0}{\ell p_0} \geq \frac{p_0}{P} = r_0 \geq b \quad \therefore \ell \leq \frac{1}{b}$$

(証明終)

[系 1] パターンの発生確率が全て等しい場合, 安定的に反応しうるパターン数 (以下, 素子の安定数とよぶ) L は $[1/b]$ に等しく, 初期反応パターンが L 個を越えていれば, 膜電位の初期値 $u_i(0)$ の小さいものから反応が消失する。

(証明) 定理 1 の 2) から, $L \leq 1/b$ 。4) から $L+1 > [1/b]$ 。故に $L = [1/b]$ 。また, 相対頻度はすべて等しいから, パターンの特性数 n_i は $u_i(0)$ の大小と一致する。3) から系の後半を得る。 (証明終)

3. 抑制性入力異なるタイプ

抑制性入力 x_0 が外部定数でなく, 細胞出力のフィードバック, あるいは入力のフィードフォワードとして与えられている場合, 検討してみよう (図 2)。

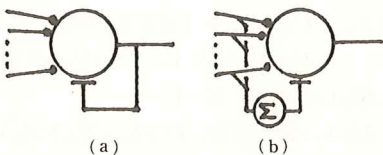


図 2 フィードバック型抑制入力(a)と
フィードフォワード型抑制入力(b)

図 2, (a)の時, (3)式に代わり,

$$\tau \dot{w}_0 = -w_0 + c' \langle r^2 \rangle$$

となるので, 膜電位 u_i の方程式は

$$\tau \dot{u}_i = -u_i + c \sum_j p_j 1[u_j] x_j \cdot x_i - c' (\sum_j p_j 1[u_j]) 1[u_i] - w_0 \tau 1[u_i]$$

となる。証明は略するが, 初期反応パターンはそのまま保存される。膜電位については, 正定数に漸近するものと, 0 と w_0 の間を振動するものに分れる。

(b)の時, (3)式の代わりに

$$\begin{aligned} \tau \dot{w}_0 &= -w_0 + c' \langle 1 \cdot x, 1 \rangle = (1, 1, \dots, 1). \\ \tau \dot{u}_i &= -u_i + c \sum_j p_j 1[u_j] x_j \cdot x_i - c' (\sum_j p_j 1[u_j]) 1 \cdot x_i \end{aligned}$$

が成立する。自明であるが $1 \cdot x_i = K$ 定数のときは(7)式で $x_0 = K$ とおいたものに等しい。一般に(a), (b)いずれも(7)式, (9)式の解とかなり異った様相を示すことが予想される。また(b)で入力の総和を直ちに抑制入力として入れたが, 比較的に大きい時定数をもつ積分要素に置きかえれば(7)式と類似の方程式が得られるだろう。

4. 相互結合を有する 2 ニューロン系

同一の入力パターンを受ける自己組織化細胞が相互に結合シナプスを介して影響しあう系を考察する。ただし, 解析の容易さからパターンの発生確率は全て等しいものとする。

4. 1 一方向の興奮性結合

細胞 2 は平衡状態にあり, 細胞 1 に興奮性シナプス荷重 v を通じてその出力が及ぼされるものとする (図 3)。このとき細胞 1 は, (9)式に細胞 2 からの入力による修正を加えた。

$$\tau \dot{u}_i^1 = -u_i^1 + v \cdot z_i^2 + N \cdot 1[u_i] - M \cdot \Sigma 1[u_j] \quad (14)$$

$$N = c(1-a)/k > 0, M = c' x_0^2 - ac > 0$$

に支配される。 u_i^a, z_i^a は第 a 細胞の入力パターン x_i の時のそれぞれ膜電位, 出力を示す。

[定義 3] $v/M \leq A(v) < v/M + 1$

で定まる整数 $A(v)$ を促進性最大パターン数とする。

$A(v)$ の意味は次の定理で与えられる。

[定理 2] 細胞 1 の時刻 t における反応パターン数を ℓ とするとき,

- 1) $\ell \geq A(v)$ の間は, パターンの増加はない。
 2) $\ell < A(v)$ なら, 細胞2から入力を受ける細胞1
 の非反応パターンがあればその膜電位最大のものは
 反応パターンとなり, 再び消滅しない。

(証明)

1) パターンに増加があるのは, 細胞2から入力を受ける場合に限る(系1)。(14)式から

$$\tau \dot{u}_i = -u_i + v - M \cdot \ell \quad (15)$$

$v/M \leq A(v) \leq \ell$ から $v - M \cdot \ell \leq 0$ 。故に $\tau \dot{u}_i \leq -u_i$ すなわち, 非反応パターンの膜電位は負の値から高々, 0に漸近するので, 反応しないことがわかる。

- 2) $\ell \leq A(v) - 1$, $\delta > 0$ が存在して

$v - M(A(v) - 1) = \delta$ 。(15)式を入れて

$$\tau \dot{u}_i \geq -u_i + v - M(A(v) - 1) = -\dot{u}_i + \delta$$

少くとも $\delta > 0$ に漸近するが, 最も早いものが時刻 t で膜電位最大のものであることは明らか。興奮後の式は(14)式から

$$\tau \dot{u}_i = -u_i + v + N - M \cdot \sum 1[u_j] \quad (16)$$

興奮の直後, $\sum 1[u_j] = \ell + 1$ となる。後続して興奮に入るパターンがあるか否かは, 条件1)により定まるが, 高々 $\sum 1[u_j] = A(v)$ となる。故に

$$v + N - M \cdot \sum 1[u_j] \geq v + N - M \cdot A(v) \geq N > 0$$

(16)式から反応が維持されることは明らかである。

(証明終)

定理2を用いて, 1方向興奮性結合の2ニューロン系の振舞いが明らかとなる。細胞の安定数を L とする。

$$\begin{aligned} \text{(系2)} \quad U_1 &= \{x_i | u_i^1(0) \geq 0\}, U = \{x_i | u_i^1(\infty) \geq 0\} \\ U_2 &= \{x_i | u_i^2(t) \geq 0, V = U_1 \cap U_2 \\ \ell &= |U_1| \end{aligned}$$

- 1) $A(v) \leq L$ の回路

$A(v) \leq \ell$ の時, $U \subseteq U_1$

$\ell < A(v)$ の時, $U = U_1 + V', V' \subseteq V$ であり

$|U_1 + V| \leq A(v)$ なら $V' = V, |U_1 + V| > A(v)$ なら $V' \subset V$ で, かつ $|U| = A(v)$

- 2) $L < A(v)$ の回路

$|U_2| \leq A(v)$ の時, $U = U_2 + U'_1, U'_1 \subseteq U_1 \cap U_2$

$|U_2| \geq L$ なら $U'_1 = \phi, |U_2| < L$ なら $|U| \leq L$ の条件の下に $|U'_1|$ 最大。

$|U_2| > A(v)$ の時, $U = U'_2, U'_2 \subseteq U_2, |U| = A(v)$

(証明)

1) $A(v) \leq \ell$ の限り定理2から, 細胞2から入力を受けて反応パターンとなるものはない。 $\ell > L$ ならば, 細胞2から入力を受けないパターンは不安定で ((16)式で v を0とおく), 反応パターンの総和が L を超えて

いる間, 初期値の小さいものから消滅する。細胞2から入力を受けている反応パターンは総和が $[(v+N)/M]$ を超えている間, 減少に向う。 ℓ が L 以下ならば, 細胞2から入力を受けないものも含めて安定なので変化はおこらない。

$\ell < A(v)$ の時, 定理2から細胞2から入力を受けるものは興奮に向う。ただし, 入力を受けない細胞1の反応パターンも条件から $\ell < L$ で安定である。したがって新たに反応パターンとなるのは, 元のパターンも含めて総和が最大 $A(v)$ 個に限られる。 $A(v)$ 個に達したときも, この回路では元のパターンが安定 ($A(v) \leq L$) であることに注意。

2) $L < A(v)$ の回路。証明は簡略化するが, 結合が太であり, 細胞2から入力を受けるパターンが $A(v)$ を超えない限りで反応するに到る。入力を受けない反応パターンが残るのは, 入力を受けるものの総和が L 個未満の場合に限られることは明らか。(証明後)

4. 2 一方向の抑制性結合

4. 1と同様, 細胞2は平衡状態にあるとする。結合は図4を参照。細胞1の反応は,

$$\tau \dot{u}_i^1 = -u_i^1 - v z_i^2 + N 1[u_i^1] - M \sum 1[u_j^1] \quad (17)$$

[定義4] $B(v) = [(N-v)/M]$, 抑制性最小パターン数とよぶ。 $B(v) \leq L$ に注意。

[定理3] 細胞1の時刻 t における反応パターン数を ℓ とするとき,

- 1) $\ell \leq B(v)$ の間は, パターンの減少はない。

- 2) $\ell > B(v)$ なら, 細胞2から入力を受ける細胞1の反応パターンがあればその膜電位最小のものは非反応パターンとなり, 再び反応しない。

(証明)

1) $\ell \leq B(v) \leq L$ だから抑制入力を受けないパターンは安定である。抑制入力を受けるものは(17)式から,

$$\tau \dot{u}_i = -u_i - v + N - M \cdot \ell$$

定理2の1)と同様に, 小さくとも0に漸近することがわかるので, 反応は維持される。2)も同様。

[系3] U_1, U_2, U, ℓ, L は系2と同じ。

$$V_1 = U_1 \cap U_2', V_2 = U_1 \cap U_2 \text{ とする。}$$

- 1) $B(v) \geq \ell$ の時, $U = U_1$

- 2) $L \geq \ell > B(v)$ の時, $U = V_1 + V'_2, V'_2 \subseteq V_2$ であり, $V_2 \neq \phi$ なら $|U| = B(v), V'_2 = \phi$ なら $L \geq |U| \geq B(v)$ 。

- 3) $\ell > L$ の時, $U = V'_1 + V'_2, V'_1 \subseteq V_1, V'_2 \subseteq V_2$ かつ

$$\text{つ} L \geq |U| \geq B(v)$$

(証明)

1) は定理 3 の 1) と同じ。

2) 抑制入力を受けないパターンはやはり安定で保存される。抑制入力を受けるパターンがあれば減少していくが、総和が $B(v)$ 個になれば減少はとまり安定となることは 1) と同じ。3) も同様である。

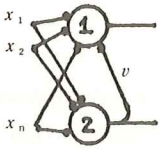


図 3 興奮性の
一方向結合

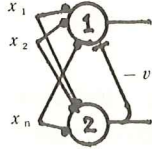


図 4 抑制性の
一方向結合

〔抑制入力 x_0 は図 3, 図 4 ともに省略した。〕

4. 3 相互に興奮性結合

相互に影響を及ぼす場合を考えてみよう。このとき、反応が定常化した段階では興奮性結合、抑制性結合の場合、それぞれ系 2, 系 3 が細胞 1 からみても細胞 2 からみても成立していなければならないし、またそのようなパターンが初期入力で実現されていれば安定であることは明らかである。くわえて、初期パターンの推移がある程度明らかとなる。図 5 に示す興奮性の結合について次の定理が成立する。

〔定理 4〕

$$U_{10} = \{x_i | u_i^1(0) \geq 0\}, U_1 = \{x_i | u_i^1(\infty) \geq 0\}$$

$$U_{20} = \{x_i | u_i^2(0) \geq 0\}, U_2 = \{x_i | u_i^2(\infty) \geq 0\}$$

$$|U_1| = \ell_1, |U_2| = \ell_2$$

1) $A(v) > L$ の回路 $U_1 = U_2 \supseteq U_{10} \cap U_{20}$. ただし $|U_{10}|, |U_{20}| \leq [(v+N)/M]$ とする。

2) $A(v) \leq L$ の回路 $\ell_1, \ell_2 \leq L$

$\ell_2 < A(v) \leq \ell_1$ または $\ell_1 < A(v) \leq \ell_2$ となる平衡解は存在しない。

$A(v) \geq \ell_1, \ell_2$ の時, $U_1 = U_2$ または $|U_1| = |U_2| = A(v)$

$A(v) \leq \ell_1, \ell_2$ の時, U_1, U_2 は存在するが共通パターンの有無は初期値による。

(証明) ℓ_1, ℓ_2 を初期反応パターン数と考えたとき, 系 2 が成立していなければならない。

1) $A(v) > L$ の場合, 系 2 の 2) が成立する。もし

$|U_2| > A(v)$ なら $|U_1| = A(v)$ 。 $|U_1| \leq A(v)$ から, $U_2 = U_1 + U_2'$ で $|U_1| = A(v) \geq L$ が成立しているから $U_2' = \phi$ 。次に, もし $|U_2| \leq A(v)$ なら, $U_1 = U_2 + U_1'$ ここで $L \leq |U_2| \leq A(v)$ ならば $U_1' = \phi$ となり, $U_1 = U_2$ 。もし $|U_2| < L < A(v)$ なら $U_1' \neq \phi$ のはずで, かつ $|U_1| \leq L$ 。 $|U_1| < A(v)$ から $U_2 = U_1 + U_2'$ かつ $|U_2| \leq L$ 。ところで, $U_1 = U_2 + U_1'$ であったから, $U_1 = U_1 + U_2' + U_1'$ 。直和記号 + の意号から $U_1' = U_2' = \phi$ が成りたたねばならない。故に $U_1 = U_2$ 。

初期共通反応パターンについては $|U_{10}|, |U_{20}|$ が共に $[(v+N)/M]$ 個以下の時, 興奮性の入力を受ける反応パターンは減少しないことから明らかである。

2) $A(v) \leq L$ の場合, 初めに $\ell_2 < A(v) \leq \ell_1$ とすると $\ell_2 < A(v)$ から $U_2 = U_2 + V'$, $V' \subseteq U_2' \cap U_1$ 。 $V' = \phi$ となるのは $|U_2| = A(v)$ 或は $U_2' \cap U_1 = \phi$ の場合に限る。前者は仮定と矛盾。後者は $U_2 \supseteq U_1$ でやはり仮定と矛盾。 $\ell_1 < A(v) \leq \ell_2$ も全く同様。

次に $A(v) \geq \ell_1, \ell_2$ のときをいう。上と同じ議論から $|U_1| = |U_2| = A(v)$ 或は $|U_2| = A(v), U_1 \supseteq U_2$ 或は $|U_1| = A(v), U_2 \supseteq U_1$ 或は $U_1 = U_2$ 。仮定の下で成立するのは, $|U_1| = |U_2| = A(v)$ 或は $U_1 = U_2$ である。前者では共通部分, 最大 $A(v)$ 個。後者では $\ell_1 = \ell_2 \leq A(v)$ 個である。

更に $A(v) \leq \ell_1, \ell_2$ の時を考える。 $|U_{10}| \leq L$ かつ $|U_{20}| \leq L$ であればパターンはそのまま安定かつ相互影響は現われない。共通パターンの有無は U_{10}, U_{20} によることは明らか。

(証明終)

4. 4 相互に抑制性結合

図 6 に示す結合について次の定理が成立する。

〔定理 5〕 $U_{10}, U_{20}, U_1, U_2, \ell_1, \ell_2$ は定理 4 と同じとする。 $\ell_1, \ell_2 \leq L$ であり,

1) $B(v) \geq \ell_1, \ell_2$ の時, 共通反応パターンは存在するか否かは初期値による。

2) $B(v) < \ell_1, \ell_2$ の時, 共通パターンなし。

3) $\ell_1 \leq B(v) < \ell_2$ 或は $\ell_2 \leq B(v) < \ell_1$ の時, 共通パターンなし。

(証明) ℓ_1, ℓ_2 を初期パターン数と考えたとき, 系 3 が成立しなければならない。 $\ell_1, \ell_2 \leq L$ は明らかである。

1) $B(v) \geq \ell_1, \ell_2$ なら相互の抑制は影響を及ぼさない。

2) 系 3 の 2) を用いて (記法もそれに従う), $B(v) < \ell_1$ から $U_1 = V_1 + V_2'$ 。もし $V_2' \neq \phi$ なら $|U_1| = B(v)$ となり矛盾。同様に $U_2 = U_2 \cap U_1'$ であり, 共通部分な

し。

3) $\ell_2 \leq B(v) < \ell_1$ の時, $U_1 = V_1 + V'_2$ 。もし $V'_2 \neq \phi$ なら $|U_1| = B(v)$ となり矛盾。故に $V'_2 = \phi$ 。即ち $U_1 = U_1 \cap U'_2$ であり共通部分なし。(証明終)

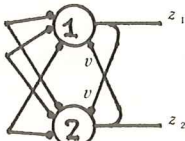


図5 相互に興奮性結合

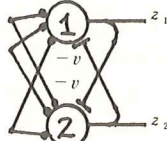


図6 相互に抑制性結合

5. 相互結合を有する1次元配列のニューロン系

興奮性の結合で図7に示すように相隣の細胞同志にのみ結合がある場合を考える。

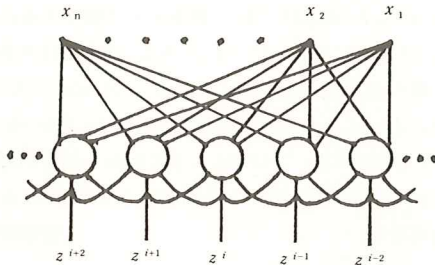


図7 相互に興奮性結合をもつ細胞群

与えられた回路に平衡解は無限に多くあることは容易にみとれる。そこで、 $A(v)=1, L \geq 1$ の回路で各パターンに初期反応する細胞が重複せず、とびとびの状態にあるとしよう。間の細胞は無反応であるから、パターンに反応する素子の近傍では系2の1)が成立する。故にパターン x_i に反応する隣の細胞は続々と x_i のみ反応し始める。両側から異なるパターンで刺激を受ける細胞は初期状態により、どちらかのパターンで反応を始め、 $A(v)=1$ から、両方のパターンに反応することはない。この模様を簡略化して図8に示す。

これは視覚領における特徴抽出細胞がコラム構造をなして分割されていることが指摘されている⁹⁾が、そのモデルと考えることができる。また入力パターンで互に“近い”と考えられるものの初期反応パターンが出る細胞が配列の中に近くに設定されていれば、恐ら

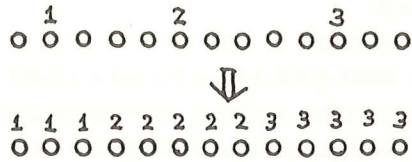


図8 反応パターンに固有の領域が成長して分割。各細胞の上の番号 i は x_i の略。

く遺伝的、生得的な要素で決められるであろうが、やはり細胞群の中に相隣りあって反応領域が形成されることになる。これもまた生理学的に観測された事実を説明する。

6. おわりに

孤立した細胞の反応について調べ、その手法を2ニューロン系に適用して、平衡解の全てを尽し得た。一次元配列の場合は、更に複雑な様相を呈するが、ここでは基本的に2ニューロン系に還元できる例をとりあげたが、興味ある事実がこのように簡単なモデルでも十分に説明しうることがわかった。更に反応領域の細胞を破壊しても自己修復機能が現われることなど、種々の展開が可能と思われる。また、興奮、抑制の両結合が共に存在するような場も解折の手法を発展させることによりとり扱えるであろう。今後に残された課題である。

〈付録〉

平均化学学習方程式(5), (6)式の妥当性を論議する。

〔定理6〕 (コルモゴロフの不等式)

X_1, X_2, \dots, X_n が独立で $EX_i = 0, v_i \equiv V(X_i)$

$$EX_i = 0, v_i \equiv V(X_i) < \infty$$

とするとき、

$$P\left\{\max_{k=1}^n |X_1 + X_2 + \dots + X_k| \geq a\right\} \leq \frac{1}{a^2} \sum_{k=1}^n v_k$$

証明は例えば文献¹⁰⁾を見よ。

〔補題4〕 $f(x)$ が区間 $[a, b]$ で連続かつ単調関数ならば、 $|f(x)| \leq \max\{|f(a)|, |f(b)|\}$

(証明) 対称性から単調非減少の場合のみ考える。このとき $f(a) \leq f(x) \leq f(b)$ 。 $f(x) \leq 0$ なら $|f(a)| \geq |f(x)|$ 。 $f(x) > 0$ なら $|f(x)| < |f(b)|$ (証明終)

(2)式において x_i^a (第 α パターン x^a の第 i 成分) は一

般にアナログ値であるが、同様の議論が進め得るので、1に限るとしよう。このとき細胞の反応パターンに変化がない間は、 rx_i^a は ϵ 時間毎に0か1の値をとり、その確率はそれぞれ非反応パターンの確率の和、反応パターンの確率の和として定まる。これを $1-p, p$ で表わす。このとき(5)式において、 $\langle rx_i \rangle = p$ となる。(3)式、(6)式の関係も同様であるから、次の定理について証明を行う。

〔完理7〕

$$\tau \dot{w} = -w + cz(t) \quad (\text{A. 1})$$

ここに $z(t)$ は ϵ 時間継続して互に独立に1または0の値をとり、その確率をそれぞれ $p, 1-p$ とする。 $z(t)$ の期待値でおきかえたものは、

$$\tau \dot{W} = -W + c\langle z(t) \rangle, \langle z(t) \rangle = p \quad (\text{A. 2})$$

となる。 $w(0) = W(0) = w_0$ とすると、任意の正数 $\delta > 0$ に対して

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \text{Prob} \left\{ \sup_{t > 0} |w(t) - W(t)| > \delta \right\} = 0$$

が成立する。

(証明) ϵ 時間の間、 $z(t)$ は1または0であるので、時間を ϵ 間隔に区切り、 $w(t)$ の値を $w_0, w_1, w_2, \dots, w_n, \dots$ とおくと、

確率 p で $\tau \dot{w} = -w + c$ 、確率 $1-p$ で $\tau \dot{w} = -w$ に支配されるから、それぞれ、

$$w_n = w_{n-1} \cdot E + c(1-E) \quad (\text{A. 3})$$

$$w_n = w_{n-1} \cdot E, \quad E = \exp(-\epsilon/\tau) \quad (\text{A. 4})$$

$X_i, i=1, 2, \dots$ を互に独立な確率変数で

$$P(X_i=1)=p, \quad P(X_i=0)=1-p$$

とおくと

$$w_n = E^n \cdot w_0 + c(1-E) \{E^{n-1} \cdot X_n + E^{n-2} \cdot X_{n-1} + \dots + X_1\}$$

他方(A. 2)式から、

$$W(t) = w_0 \exp(-t/\tau) + pc \{1 - \exp(-t/\tau)\} \quad (\text{A. 5})$$

$$W(n\epsilon) = E^n \cdot w_0 + c(1-E) \{E^{n-1} \cdot p + E^{n-2} \cdot p + \dots + p\} \quad (\text{A. 6})$$

となる。更に

$$Y_i = (1-E)E^{i-1}(X_i - p), i=1, 2, \dots$$

とおくと Y_i は互に独立で、

$$E[Y_i] = 0, \quad V[Y_i] = (1-E)^2 E^{2(i-1)} p(1-p) < \infty$$

定理7より

$$P \left\{ \max_{k=1}^n \left| \sum_{j=1}^k Y_j \right| > \delta \right\} \leq \frac{1}{\delta^2} \sum_{i=1}^n V[Y_i]$$

$$\sum_{i=1}^n V[Y_i] = p(1-p)(1-E)^2(1-E^{2n})/(1-E^2)$$

(A. 7)

$$0 < E < 1 \text{ に注意して } \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n V[Y_i] = p(1-p)(1-E)^2/(1-E^2)$$

また

$$w_k - W(k\epsilon) = \sum_{j=1}^k Y_j$$

であるから

$$P \{ \max_n |w_n - W(n\epsilon)| > \delta \}$$

$$\leq 1/\delta^2 \cdot p(1-p)(1-E)^2/(1-E^2)$$

ここで w の基礎の確率空間を (Q, P) とすると、(A. 1)式の解は $w(t, \omega), \omega \in Q$ 。任意の $t > 0$ に対して n が存在して

$$(n-1)\epsilon \leq t < n\epsilon \quad (\text{A. 8})$$

(A. 2)式と(A. 3)、(A. 4)に対応する微分方程式から、

$$\tau \frac{d}{dt} (w - W) = -(w - W) + c(1-p)$$

$$\tau \frac{d}{dt} (w - W) = -(w - W) - cp$$

$w - W$ はいずれの場合も(A. 8)の区間で単調であるから、補題4により、

$$|w(t, \omega) - W(t)| \leq \max_{i=n-1, n} |w(i\epsilon, \omega) - W(i\epsilon)|$$

が成立して、

$$P \left\{ \sup_{(n-1)\epsilon \leq t < n\epsilon} |w(t) - W(t)| > \delta \right\}$$

$$\leq P \left\{ \max_{i=n-1, n} |w(i\epsilon) - W(i\epsilon)| > \delta \right\}$$

故に

$$P \left\{ \sup_{t > 0} |w(t) - W(t)| > \delta \right\}$$

$$\leq 1/\delta^2 \cdot p(1-p)(1-E)^2/(1-E^2)$$

$\epsilon \rightarrow 0$ のとき、 $E \rightarrow 1$ 、 $(1-E)^2/(1-E^2) \rightarrow 0$ となり定理の結果を得る。(証明終)

$\epsilon \rightarrow 0$ のとき、反応パターンに変化がない間、確率1で $w(t)$ は $W(t)$ に一致することがわかった。反応パターンは高々有限回しか変化しないので(2)、(3)式を平均化した(5)、(6)式の解全体についての確率1の収束がいえる。また興味深いのは $\lim \sum V[Y_i] < \infty$ であり、 ϵ 一定の下でも解が拡散するのではなく、一定の分散内におさまり続けることである。

文 献

- 1) 甘利俊一：神経回路網の数理（産業図書出版、1968）
- 2) D. Marr : J. Physiol., **202**, 437 (1969)
- 3) J. S. Albus : Math. Biosciences, **10**, 25 (1971)
- 4) C. von der Malsburg : Kybernetik, **14**, 85 (1973)

- 5) 甘利俊一：信学会パタ認学習研資，PRL77-3，
(1977)
- 6) D. J. Willshaw and C. von der Malsburg：Proc.
Roy. Soc., **B-194**, 431 (1976)
- 7) 竹内彰一，甘利俊一：信学会医用生体研資，
MBE78-108 (1979)
- 8) 藤田昌彦：長崎造船大学紀要，**18**, 1 (1977)
- 9) D. H. Hubel and T. N. Wiesel：J. Neuro-
physiol., **26**, 994 (1963)
- 10) 伊藤 清：確率論（岩波基礎数学講座）P. 181（岩
波書店，1977）